

1. FUNCIONES DEFINIDAS MEDIANTE INTEGRALES

1.3. Ejercicios complementarios

- Halla, usando la regla de Leibniz, la siguiente integral: $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.
- Calcula la derivada en $t = 1$ de la función $f(t) = \int_{t^2+1}^{e^t} \frac{\sin xt}{x} dx$.
- Calcula, usando integrales eulerianas, el valor de las siguientes integrales:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \int_0^\infty x^5 a^{-3x} dx, \quad a > 1 & \text{(d)} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sqrt{\tan x}} + \frac{1}{\sqrt{\cot x}} \right) dx \\
 \text{(b)} \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-n^2 x^2} dx & \text{(e)} \int_0^{\sqrt[n]{a}} (a - x^n)^p dx, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N} \\
 \text{(c)} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx & \text{(f)} \int_0^1 x^m \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx, \quad p, m > -1
 \end{array}$$

- Demuestra que es cierta la siguiente fórmula para la función beta: $\beta(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}} dx$.
Úsala para calcular el valor de las siguientes integrales impropias:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^4 \sqrt{x}} & \text{(b)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1) \sqrt[3]{x(x+1)^2}}
 \end{array}$$

- Sabiendo que $\prod_{j=1}^{k-1} \sin \frac{j\pi}{k} = \frac{k}{2^{k-1}}$, calcula $I(k) = \prod_{m=1}^k \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^k} dx$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

- $I = \frac{3\pi+8}{32}$.
- $f'(1) = 2(\sin e - \sin 2)$.
- (a) $\frac{5!}{(3 \ln a)^6}$; (b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2n^3}$; (c) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(\frac{3}{4})^2$; (d) $\pi\sqrt{2}$; (e) $\frac{a^{p+1/n}}{n} \beta(\frac{1}{n}, p+1)$; (f) $\frac{\Gamma(p+1)}{(m+1)^{p+1}}$.
- Haciendo en la integral el cambio $u = \frac{x}{x+1}$ se obtiene la función beta. (a) $\frac{5\pi}{16}$; (b) $\frac{3}{2}$.
- $I(k) = \frac{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}}{k^{k+\frac{1}{2}}}$.